

- $(\vec{i}, \vec{j})$ désigne une base orthonormée, λ un nombre réel et $\vec{u}(x; y)$ un vecteur.
 $\lambda \vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\lambda x; \lambda y)$. De plus $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$.

• Pour tous nombres réels λ, λ' et tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$:

- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$ • $(\lambda + \lambda')\vec{u} = \lambda \vec{u} + \lambda' \vec{u}$ • $\lambda(\lambda' \vec{u}) = (\lambda \lambda')\vec{u}$
- $\lambda \vec{u} = \vec{0}$ si, et seulement si, $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$. • $-\vec{u}$ est le vecteur opposé au vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$.
- $\vec{u}(x; y)$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ équivaut à $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Deux calculs

- Calculer la médiane de la liste suivante :

5 - 10 - 12 - 7 - 9 - 18 - 20

On ordonne la liste : 5 - 7 - 9 - 10 - 12 - 18 - 20.

La médiane est 10.

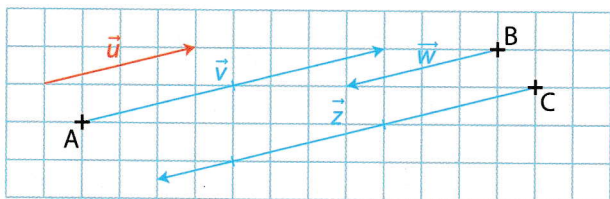
- Dans un repère, une courbe a pour équation $y = 1 + \frac{1}{x}$ (avec $x \neq 0$ et $y \neq 1$). Exprimer x en fonction de y .

$$y = 1 + \frac{1}{x} \text{ soit } x = \frac{1}{y-1}$$



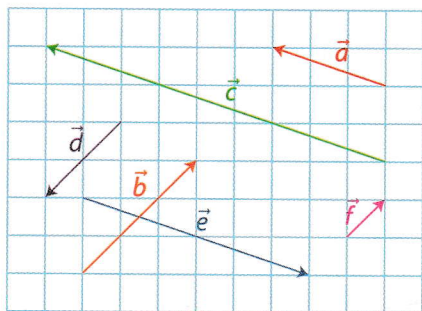
1 Représenter les vecteurs :

- $\vec{v}$ d'origine A tel que $\vec{v} = 2\vec{u}$
- $\vec{w}$ d'origine B tel que $\vec{w} = -\vec{u}$
- $\vec{z}$ d'origine C tel que $\vec{z} = -2,5\vec{u}$.

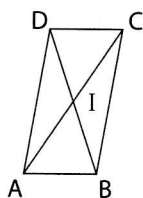


2 Compléter les pointillés avec un nombre réel.

- $\vec{c} = 3 \cdot \vec{a}$
- $\vec{e} = -2 \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} = \frac{1}{2} \cdot \vec{e}$
- $\vec{b} = 3 \cdot \vec{f}$
- $\vec{f} = \frac{1}{2} \cdot \vec{d}$
- $\vec{d} = -2 \cdot \vec{f}$



3 ABCD est un parallélogramme de centre I. Relier les vecteurs qui sont égaux.



- | | | |
|------------|---|-----------------------|
| $\vec{DB}$ | • | $-\vec{CD}$ |
| $\vec{AB}$ | • | $\frac{1}{2}\vec{AC}$ |
| $\vec{IC}$ | • | $2\vec{IB}$ |
| $\vec{ID}$ | • | $\frac{1}{2}\vec{BD}$ |

4 Dans un repère orthonormé, on donne les points :

A(1; -5), B(3; 2) et C(-4; 5).

a. Déterminer les coordonnées des vecteurs :

• $\vec{AB}(2; 7)$ • $\vec{AC}(-5; 10)$.

b. En déduire les coordonnées des vecteurs :

• $\vec{u} = -2(\vec{AB} + \vec{AC})$

$(-2(2 + (-5)); -2(7 + 10))$ soit $(6; -34)$.

• $\vec{v} = 5\vec{AB} - 3\vec{AC}$

$(5 \times 2 - 3 \times (-5); 5 \times 7 - 3 \times 10)$ soit $(25; 5)$.



5 Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ et $\vec{w} = 4\vec{i} - 14\vec{j}$.

Démontrer que $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.

$\vec{u}(1; 1)$, $\vec{v}(2; -4)$, $\vec{w}(4; -14)$

donc $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$ a pour coordonnées :

$(2 \times 1 - 3 \times 2 + 4; 2 \times 1 - 3 \times (-4) + (-14))$

c'est-à-dire $(2 - 6 + 4; 2 + 12 - 14)$ soit $(0; 0)$.

Ainsi, $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.

6 [AB] est un segment de longueur 6 cm. Placer le point M de la droite (AB) tel que $\vec{MA} + 3\vec{MB} = \vec{0}$.



$\vec{MA} + 3\vec{MB} = \vec{0}$ équivaut, d'après la relation de Chasles à

$\vec{MA} + 3(\vec{MA} + \vec{AB}) = \vec{0}$ c'est-à-dire $4\vec{MA} + 3\vec{AB} = \vec{0}$

Ainsi, $3\vec{AB} = -4\vec{MA}$ soit $\vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{AB}$.

7 Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne le vecteur $\vec{u} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$.

a. Calculer la norme de $\vec{u}$.

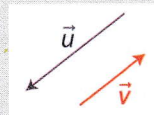
$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$.

b. En déduire la norme de $\vec{v} = \vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j}$.

$\vec{v} = -\frac{1}{4}(-4\vec{i} + 3\vec{j}) = -\frac{1}{4}\vec{u}$.

donc $\|\vec{v}\| = \left\| -\frac{1}{4}\vec{u} \right\| = \left| -\frac{1}{4} \right| \times \|\vec{u}\| = \frac{1}{4} \times 5 = \frac{5}{4}$.

- Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, autrement dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction. On convient que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
- Dans une base orthonormée, $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont deux vecteurs. Le **déterminant** du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ est le nombre $xy' - x'y$.
- $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = 0$.

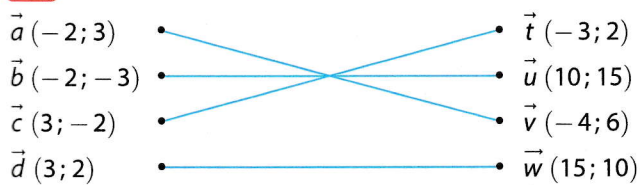


Deux calculs

- Quelle est la nature du nombre $F = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}}$?
 $F = \frac{\sqrt{4 \times 12}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{12}}{\sqrt{12}} = \sqrt{4} = 2$, donc $F \in \mathbb{N}$.
- Développer et réduire $B = (2x - 3)^2 + 4x$.
 $B = 4x^2 - 12x + 9 + 4x = 4x^2 - 8x + 9$.



- 1 Relier chaque vecteur à un vecteur qui lui est colinéaire.



- 2 Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{u} = \sqrt{2}\vec{i} - 4\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

$\vec{u}(\sqrt{2}; -4)$ et $\vec{v}(1; \sqrt{2})$
 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} - 1 \times (-4) = 2 + 4 = 6$ et $6 \neq 0$
 donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

- 3 Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne :

$$\vec{u}\left(\frac{1}{3}; -1\right), \vec{v}\left(2; -\frac{4}{3}\right), \vec{w} = -\vec{i} + 3\vec{j} \text{ et } \vec{z} = 6\vec{i} + 4\vec{j}.$$

- a. Calculer le déterminant de chaque couple de vecteurs.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\frac{1}{3} \times \left(-\frac{4}{3}\right) - 2 \times (-1) = -\frac{4}{9} + 2 = -\frac{4}{9} + \frac{18}{9} = \frac{14}{9}$$

• $\vec{u}$ et $\vec{w}$: $\frac{1}{3} \times 3 - (-1) \times (-1) = 1 - 1 = 0$

• $\vec{v}$ et $\vec{z}$: $2 \times 4 - 6 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = 8 + 8 = 16$

• $\vec{w}$ et $\vec{z}$: $-1 \times 4 - 6 \times 3 = -4 - 18 = -22$

- b. En déduire deux vecteurs colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires car leur déterminant est égal à 0.

- c. Donner les coordonnées d'un vecteur colinéaire à $\vec{v}$.

Par exemple $3\vec{v}(6; -4)$.



- 4 A et B sont deux points donnés.

M et N sont des points tels que :

$$\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} = \vec{0} \text{ et } -\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} = \vec{0}.$$

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

- D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} = \vec{0} \text{ équivaut à } \overrightarrow{AM} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) = \vec{0}$$

c'est-à-dire $3\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BA} = \vec{0}$ soit $\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

- D'après la relation de Chasles :

$$-\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} = \vec{0} \text{ équivaut à } -\overrightarrow{AN} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}) = \vec{0}$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BA} = \vec{0}$ soit $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

- 5 Dans une base orthonormée, on donne les vecteurs $\vec{u}(a-1; 4)$ et $\vec{v}(2; a+1)$ où a désigne un nombre réel.

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$$(a-1)(a+1) - 2 \times 4 = 0 \text{ équivaut à } a^2 - 1 - 8 = 0$$

c'est-à-dire $a^2 = 9$.

Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsque $a = -3$ ou $a = 3$.

- 6 Dans chaque cas, démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

a. $4\overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{CD} = \vec{0}$

b. $\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

a. L'égalité s'écrit $4(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}) = -2\overrightarrow{CD}$

c'est-à-dire $4(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) = -2\overrightarrow{CD}$ soit $4\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

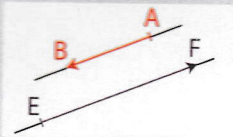
b. L'égalité s'écrit $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

c'est-à-dire $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

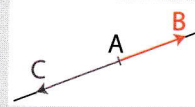
soit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Ainsi, $2\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC}$ et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

- Deux droites (AB) et (EF) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.



- Trois points A, B, C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



Deux calculs

- Sans calculatrice, déterminer $A = 1\,002^2 - 998^2$.

$$A = (1\,002 + 998)(1\,002 - 998) = 2\,000 \times 4 = 8\,000$$

- Développer et réduire $A = 7 - (2 - 4x)^2$.

$$A = 7 - (4 - 16x + 16x^2) = -16x^2 + 16x + 3$$



- 1 Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$M(3; 3)$, $N(8; 5)$, $P(1; -2)$ et $Q(16; 4)$.

- a. Compléter avec les coordonnées.

• $\overrightarrow{MN}$ (5; 2) • $\overrightarrow{PQ}$ (15; 6)

- b. En déduire que les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.

$\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{MN}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

Ainsi les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.

- 2 A, B, C, M et N sont cinq points distincts tels que :

$$4\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} = \vec{0} \quad 5\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

- a. Vérifier que $\overrightarrow{CN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

$$5\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{AB} \text{ soit } \overrightarrow{CN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

- b. En déduire que les droites (AM) et (CN) sont parallèles.

$$\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AM} \text{ donc } \overrightarrow{CN} = -\frac{2}{5} \times 4\overrightarrow{AM} = -\frac{8}{5}\overrightarrow{AM}$$

Ainsi les droites (CN) et (AM) sont parallèles.

- 3 A, B, E, F sont des points tels que $6\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = 5\overrightarrow{AF}$.

- a. Démontrer que $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{EF}$.

$$5\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = 5\overrightarrow{AF} \text{ soit } \overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AF} - 5\overrightarrow{AE}$$

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{AB} = 5(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}) = 5\overrightarrow{EF} \text{ donc } \overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{EF}$$

- b. Que peut-on dire des droites (AB) et (EF) ?

(AB) et (EF) sont parallèles car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

- 4 Dans un repère orthonormé, étudier l'alignement des points $R(-3; -2)$, $S(4; 1)$, $T(6; 2)$.

$$\overrightarrow{RS}(7; 3) \text{ et } \overrightarrow{ST}(2; 1). \text{ Or, } 7 \times 1 - 2 \times 3 = 1 \text{ et } 1 \neq 0.$$

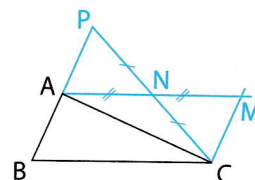
Donc les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{ST}$ ne sont pas colinéaires, et les points R, S, T ne sont pas alignés.

- 5 a. Placer sur la figure ci-dessous :

- l'image M du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$,

- le milieu N du segment $[AM]$,

- le point P symétrique de C par rapport à N.



- b. Démontrer que les points A, B, P sont alignés.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM}$ donc ABCM est un parallélogramme et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$.

N est le milieu des diagonales $[PC]$ et $[AM]$ du quadrilatère PACM, donc PACM est un parallélogramme.

Ainsi $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MC}$.

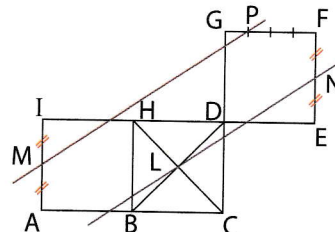
Finalement $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AB}$, donc les points A, B, P sont alignés et A est le milieu du segment $[BP]$.



- 6 ABHI, BCDH, DEFG sont des carrés de même côté avec D milieu de $[CG]$.

L est le centre du carré BCDH, M et N sont les milieux des

segments $[AI]$ et $[EF]$. P est le point vérifiant $\overrightarrow{GP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$.



Utiliser le repère orthonormé $(B; C, H)$ pour démontrer que les droites (MP) et (LN) sont parallèles.

$$M\left(-1; \frac{1}{2}\right), P\left(\frac{5}{4}; 2\right) \text{ donc } \overrightarrow{MP}\left(\frac{9}{4}; \frac{3}{2}\right).$$

$$L\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), N\left(2; \frac{3}{2}\right) \text{ donc } \overrightarrow{LN}\left(\frac{3}{2}; 1\right).$$

$$\text{Or } \frac{9}{4} \times 1 - \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 0, \text{ donc les vecteurs } \overrightarrow{MP}$$

et $\overrightarrow{LN}$ sont colinéaires et les droites (MP) et (LN) sont parallèles.